Merkwürdige Punkte im Dreieck

Jeder der im Folgenden beschriebenen Punkte ergibt sich aus dem Schnitt zweier Geraden. Als Darstellungsform für die Geraden in der Ebene (= R^2) bieten sich 2 Möglichkeiten an:

- ❖ Die Normalvektorform, d.h. um die Geradengleichung aufstellen zu können, benötigt man einen Punkt P und einen Normalvektor $\vec{n}$:
$$\vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot \vec{P}$$

- ❖ Die Parameterdarstellung, d.h. um die Geradengleichung aufstellen zu können, benötigt man einen Punkt P und einen Richtungsvektor $\vec{v}$:
$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{v}$$

1. **Höhenschnittpunkt H** (= Schnittpunkt der Höhenlinien)
Die Höhenlinien stehen normal auf die jeweilige Seite und gehen durch den der Seite gegenüberliegenden Punkt.

Gerade	Normalvektor	Punkt
Höhe auf a - h_a	$\overrightarrow{BC}$	A
Höhe auf b - h_b	$\overrightarrow{AC}$	B

2. **Umkreismittelpunkt U** (= Schnittpunkt der Seitensymmetralen)
Die Seitensymmetralen stehen normal auf die jeweilige Seite und gehen durch den Halbierungspunkt der Seite.

Gerade	Normalvektor	Punkt
Sym. auf a - m_a	$\overrightarrow{BC}$	$M_a = \frac{B+C}{2}$
Sym. auf b - m_b	$\overrightarrow{AC}$	$M_b = \frac{A+C}{2}$

3. **Schwerpunkt S** (= Schnittpunkt der Schwerlinien)
Die Schwerlinien verbinden den Halbierungspunkt einer Seite mit dem der Seite gegenüberliegenden Punkt (sie stehen daher i.a. nicht normal auf die jeweilige Seite)

Gerade	Richtungsvektor	Punkt
Schwerlinie auf a - s_a	$\overrightarrow{M_a A}$	A
Schwerlinie auf b - s_b	$\overrightarrow{M_b B}$	B

Einfachere Methode, um den Schwerpunkt zu berechnen:

$$S = \frac{A+B+C}{3}$$

4. **Inkreismittelpunkt I** (= Schnittpunkt der Winkelsymmetralen)
   Die Winkelsymmetralen gehen durch einen Eckpunkt und halbieren dabei den zum Punkt gehörigen Winkel.

Gerade	Richtungsvektor	Punkt
Winkelsym. zu $\alpha - w_\alpha$	$\overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0}$	A
Winkelsym. zu $\beta - w_\beta$	$\overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{BC_0}$	B

(wobei $\overrightarrow{AB_0}$ den Einheitsvektor zu $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet
→ Einheitsvektor = Vektor / Betrag des Vektors)

Die **Eulersche Gerade** verbindet U, H und S.

Anmerkung für Berechnungen im Raum (R^3): Im Raum läßt sich eine Gerade nur in Parameterform darstellen. Daher ergeben sich für die Berechnung von H und U folgende Änderungen:

Durch Einsetzen in die Normalvektorform ergeben sich jeweils zwei Ebenen. Nimmt man nun diese beiden Ebenen und die Ebene, in der das Dreieck liegt, so erhält man 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten → Gleichungssystem lösen → gesuchter Punkt !!!

Platz für Zeichnung: (achte auf die richtige Beschriftung !)